***Задача 1.***

*Решение.* Искомое расстояние — это высота пирамиды *ABCD*, проведённая из точки *D*.

Пусть *M* — середина *AB*. Проведём перпендикуляр *DH* на прямую *CM* (рис. 1). Покажем, что *DH* будет высотой нашей пирамиды.

*A*

*B*

*C*

*D*

*M*

*H*

2

1

2

2

1

*ϕ*

Рис. 1.

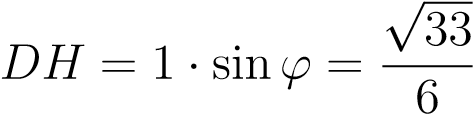
Поскольку медиана *CM* является высотой треугольника *ABC*, имеем *AB* ⊥ *CM*. Точно так же *AB* ⊥ *DM* (ведь треугольник *ABD* тоже равносторонний). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости получаем, что *AB* перпендикулярна плоскости *MDC*. Значит, *AB* перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости — в частности, прямой *DH*.

Итак, *DH* ⊥ *CM* (по построению) и *DH* ⊥ *AB*. Отсюда получаем *DH* ⊥ *ABC*, что мы и хотели.

Из треугольников *BCM* и *BDM* легко находим: *CM* = *DM* =√3. Теперь запишем теорему косинусов для стороны *DM* треугольника *DMC*:

3 = 1 + 3 − 2 · 1 ·3√cos *ϕ*

(здесь *ϕ* = ∠*DCM*). Отсюда cos *ϕ* = √3*/*6, sin*ϕ* = √33*/*6 и

 *.*

*Ответ:* .

***Задача 2***

*Решение.* Поскольку *A*1*B*1 k *AB*, прямая *A*1*B*1 параллельна плоскости *ABC*1. Следовательно, искомое расстояние *d* есть расстояние от любойточки прямой *A*1*B*1 до плоскости *ABC*1 (ведь все эти расстояния равны друг другу). Поэтому мы можем выбрать наиболее удобную точку на прямой *A*1*B*1. Это, несомненно, точка *N* — середина отрезка *A*1*B*1 (рис. 2).

*A*

*B*

*C*

*A*

1

*B*

1

*C*

1

*M*

*H*

2

1

*N*

*d*

Рис. 2.

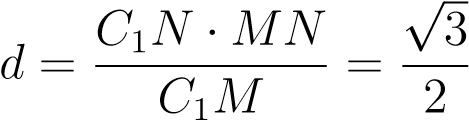
Пусть *M* — середина *AB*. Проведём *NH* перпендикулярно *C*1*M*. Покажем, что *NH* ⊥ *ABC*1.

В равнобедренном треугольнике *ABC*1 медиана *C*1*M* является одновременно высотой, так что *AB* ⊥ *C*1*M*. Кроме того, *AB* ⊥ *MN*, так как призма прямая. Следовательно, прямая *AB* перпендикулярна плоскости *C*1*MN* — и, в частности, прямой *NH*, лежащей в этой плоскости.

Итак, *NH* ⊥ *C*1*M* (по построению) и *NH* ⊥ *AB*. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая *NH* перпендикулярна плоскости *ABC*1, что мы и хотели показать. Стало быть, искомое расстояние *d* равно длине отрезка *NH*. Дальше несложно. Имеем: *MN* = 1, *C*1*N* =√3 и

*C*1*M* = √*C*1*N*2 + *MN*2 = 2*,*

откуда

 *.*

*Ответ:* .

***Задача 3***

*Решение.* Пусть *ST* — высота пирамиды (рис. 3). Точка *T* является серединой отрезка *DB*. Тогда, согласно нашей теореме, искомое расстояние *d* от точки *D* до плоскости *BCS* равно удвоенному расстоянию от точки *T* до этой плоскости.

*A*

*B*

*C*

*D*

*S*

*T*

2

1

*M*

*H*

Рис. 3.

А расстояние от точки *T* до плоскости *BCS* равно высоте *TH* треугольника *STM* (точка *M* — середина *BC*). Действительно, *TH* перпендикулярна также прямой *BC* (*BC* ⊥ *TM*, *BC* ⊥ *SM* ⇒ *BC* ⊥ *STM* ⇒ *BC* ⊥ *TH*), и потому *TH* — перпендикуляр к плоскости *BCS*.

Из треугольника *STM* легко находим: *TH* =√2*/*2.

Тогда *d*=2 ·*TH=√2*

*Ответ:* 2.

***Задача 4***

*Решение.* Здесь можно осуществить переход *M* → *D*1 → *C* (рис. 4).

*A*

*B*

*C*

*D*

*A*

1

*B*

1

*C*

1

*D*

1

*M*

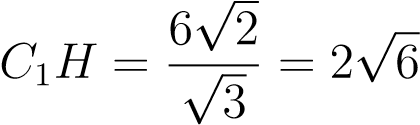
*H*

Рис. 4.

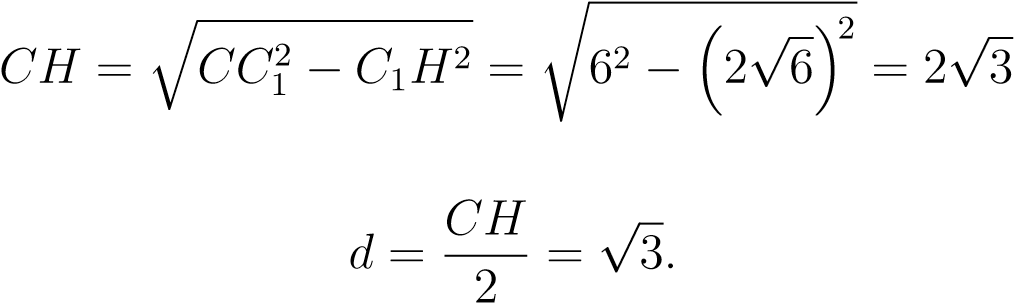
Именно, пусть искомое расстояние от точки *M* до плоскости *BC*1*D* равно *d*. Тогда расстояние от точки *D*1 до этой плоскости равно 2*d*. Отрезок *D*1*C* делится плоскостью *BC*1*D* пополам, поэтому расстояние от точки *C* до данной плоскости также равно 2*d*.

С другой стороны, расстояние от точки *C* до плоскости *BC*1*D* есть высота *CH* треугольной пирамиды *BC1DC*. Основанием этой пирамиды служит равносторонний треугольник *BC*1*D* со стороной 6 √2. Боковые рёбра пирамиды равны 6. Стало быть, данная пирамида является правильной, и точка *H* — центр треугольника *BC*1*D*.

Отрезок *C*1*H* есть радиус окружности, описанной вокруг треугольника *BC*1*D*. Имеем:

*.*

Тогда

*.*

Следовательно,

*Ответ:√3*